LÍMITES DE FUNCIONES
CONTINUIDAD

MATEMÁTICAS CCSS I   1º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) IDEA INTUITIVA DE $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Ejemplo 1: La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ no está definida en x=1; investigar, rellenando las siguientes tablas (mediante calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x \to 1^-$	0,9	0,99	0,999…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$

$x \to 1^+$	1,1	1,01	1,001…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \quad}$

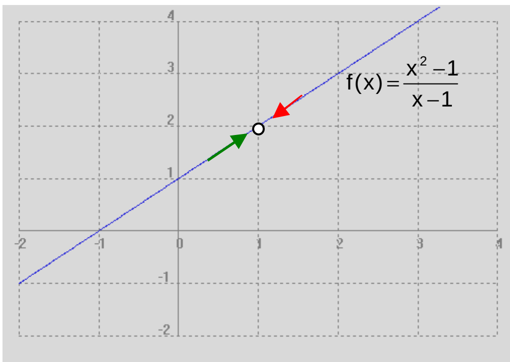
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

Es decir, nótese que la f(x) del enunciado se comporta como la recta y=x+1, salvo en x=1 (punto en el cual no está definida); por lo tanto, su representación gráfica es:

GRÁFICAMENTE



Vemos que cuando las x se acercan a 1^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^-, mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^+. **Y todo ello es independiente de que, exactamente en x=1, la función no está definida**.

■ Conclusiones:

1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales.

2º **A efectos de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades**; de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo anterior), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.

3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: Dada $f(x)=x^2$, obtener numéricamente, mediante las siguientes tablas, $\lim_{x\to 2} f(x)$:

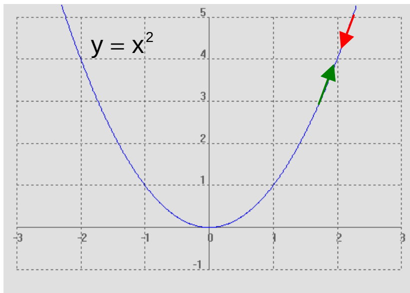
$x\to 2^-$	1,9	1,99	1,999…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) =$

$x\to 2^+$	2,1	2,01	2,001…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) =$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 2} f(x) =}$

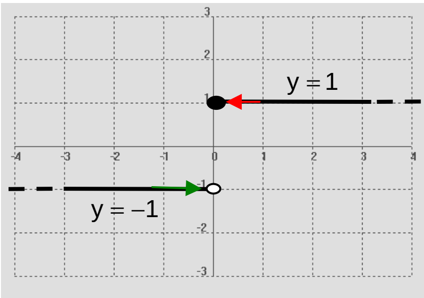


Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^-, mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^+. En este caso, la función sí está definida precisamente en x=2, y su valor es 4; es decir, **en este ejemplo límite e imagen coinciden (lo cual, por cierto, es lo más habitual)**. Analíticamente, sería muy sencillo:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

- Veamos ahora un ejemplo de función en el que no hay límite:

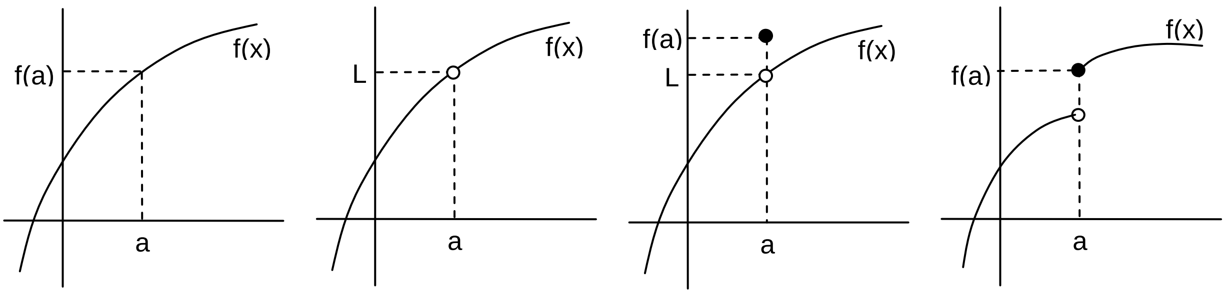
Ejemplo 3: Dada $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim_{x\to 0} f(x)$ gráficamente.



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (-1) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \ 1 \ = \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x\to 0} f(x)}$$

En este caso, al acercarnos a $x=0^-$ por la rama izquierda, las imágenes tienden exactamente a –1 (aunque precisamente en x=0 no tengan el valor esperado, sino 1; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que tener en cuenta lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades…), mientras que al acercarnos a $x=0^+$ por la rama derecha, las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe**.

- Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema; va a existir límite cuando x→a sólo en los tres primeros supuestos:



$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$	$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L$	$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \neq f(a)$	$\nexists \lim_{x\to a} f(x)$
[Lo más habitual]	[aunque $\nexists f(a)$]		[aunque $\exists f(a)$]

Como resumen: **«A efectos gráficos, no va a haber $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si en x=a las dos ramas no coinciden»**

Ejercicios final tema: 1, 2, 3

II) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. ASÍNTOTA VERTICAL

Ejemplo 4: Vemos fácilmente que la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ no está definida en x=3; investigar, rellenando las siguientes tablas (inténtese sin calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar analítica y gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x\to 3^-$	2,9	2,99	2,999…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$

$x\to 3^+$	3,1	3,01	3,001…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 3} f(x)=}$$

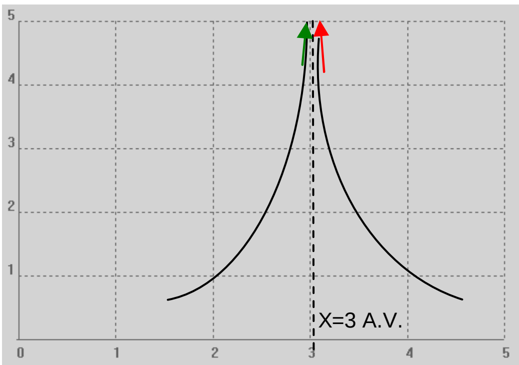
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, se procede así[1]:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{(0^-)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{(0^+)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$$

GRÁFICAMENTE

Gráficamente, la situación es la siguiente:



Es decir, cuando las x se acercan a 3^- (flecha izqda; rama izquierda) las imágenes correspondientes tienden a hacerse infinitamente grandes i.e. ∞, y cuando las x se aproximan a 3^+ (flecha dcha.; rama derecha) las imágenes tienden también a ∞. Y todo ello, volvemos a insistir, es independiente de que concretamente en x=3 la función no está definida. Esta es precisamente la **utilidad de la noción de límite:** incluso **aunque la función no esté definida en un punto, el límite da cuenta del comportamiento de la función en dicho punto**.

En el ejemplo anterior, se dice que f(x) presenta una asíntota vertical en x=3.

[1] 0^+ o 0^- se conocen como *infinitésimos*.

■ **Observaciones:**

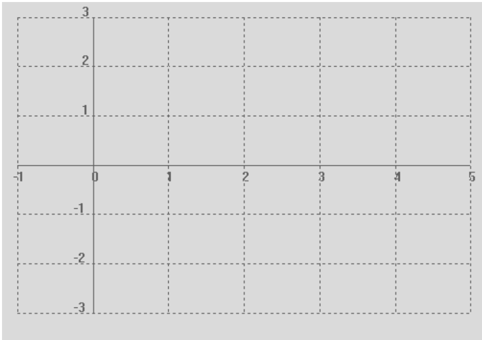
1º Cuando por sustitución directa en un límite obtengamos k/0, automáticamente tenemos que plantear límites laterales, para discernir si el denominador es 0^+ o 0^-, lo cual determinará si el límite finalmente es ∞ o $-\infty$ (en función también del signo de k).

2º Nótese que, a la hora de calcular un límite, en el momento en que sustituyamos en la función, desaparece el símbolo de lim.

■ **Definición de asíntota vertical:** $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \underset{(o\ -\infty)}{\infty} \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.}}$

Ejemplo 5: Estudiar analíticamente $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$ y explicar gráficamente la situación. ¿Qué asíntota vertical presenta la función?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} = }$$



Ejercicios final tema: 4, 5

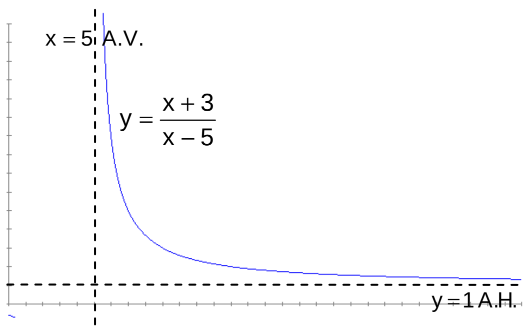
III) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. ASÍNTOTA HORIZONTAL

Ejemplo 6: Estudiar, mediante la siguiente tabla de valores, $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-5}$

x	100	1 000	10 000	100 000… ∞
$f(x)=\frac{x+3}{x-5}$				

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-5} = }$$

En la práctica, como $x\to\infty$, lógicamente podemos despreciar el efecto de sumar o restar un número finito a x, por lo cual podemos proceder de la siguiente forma:



$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-5} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

Es decir, **cuando $x\to\infty$** (o $-\infty$), **nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado. ¡Nótese que esto sólo tiene sentido cuando $x\to\infty$ (o $-\infty$)! Ésta será una técnica muy utilizada para calcular límites.

El símbolo $\approx$ se lee "equivalente a " y se utiliza cuando, a la hora de resolver una indeterminación, $x\to\infty$ y despreciamos una cantidad finita aditiva respecto a un ∞.

Gráficamente, la situación está indicada al margen.

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a aproximarse cada vez más a 1^+, pero sin llegar a alcanzar jamás el valor 1. Se dice entonces que f(x) presenta una asíntota horizontal de ecuación y=1. (Por cierto que, por las razones explicadas en el anterior apartado, también presenta una A.V. en x=5).

- **Definición de asíntota horizontal:** $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \ \text{ A.H.}}$

- **Observaciones:** **1º** La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x

  2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.

  3º En el próximo tema veremos un tercer tipo: las asíntotas oblicuas

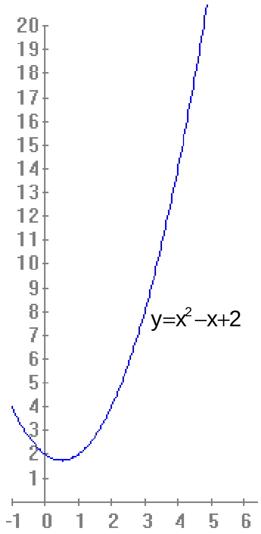
Ejercicios final tema: 6 y 7

IV) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. RAMAS INFINITAS

Ejemplo 7: Obtener $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x + 2)$ mediante la siguiente tabla de valores:

x	100	1 000	10 000 … ∞
$f(x)=x^2-x+2$			

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x + 2) = \quad}$



Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a hacerse tan grandes como queramos, como queda reflejado en la gráfica adjunta. En la práctica, y como ya hemos comentado en el apartado anterior, **cuando x→∞** (o **-∞**) **nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x + 2) \approx \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

De nuevo, adviértase que esta forma de proceder sólo tiene sentido cuando x→∞ (o -∞), no cuando x tiende a un número finito. En el ejemplo anterior, se dice además que f(x) presenta una rama infinita o parábolica.

- **Regla práctica:** $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} P(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} (\text{tº de mayor grado})}$

Ejercicio final tema: 8

V) PROPIEDADES DE LOS LÍMITES[2]

1º) «El límite –en caso de existir– es único»

2º) $\boxed{\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)}$ es decir, «El límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites».

3º) $\boxed{\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)}$ es decir, «El límite del producto es el producto de los límites».

4º) $\boxed{\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}}$ (siempre y cuando lim g(x)≠0)

5º) $\boxed{\lim k = k}$ es decir, «El límite de una constante es igual a dicha constante»

6º) $\boxed{\lim [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim f(x)}$ es decir, «Las constantes multiplicativas pueden salir (o entrar) en el límite».

7º) Límite de una potencia: $\boxed{\lim [f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}}$ **Ejemplo:** $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = e^\infty = \infty$

8º) Límite de una raíz: $\boxed{\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}}$

9º) Límite de un logaritmo: $\boxed{\lim \log f(x) = \log \lim f(x)}$

VI) LÍMITES INFINITOS E INDETERMINACIONES

- **SUMA Y RESTA:** $\boxed{\infty+\infty=\infty \qquad \infty+k=\infty \qquad \infty-\infty=\textbf{INDTDO.} \qquad -\infty-\infty=-\infty}$

Nótese que no podemos concluir que ∞–∞ sea siempre igual a 0, puesto que ambos ∞ pueden ser, en general, de distinto orden[3]; por lo tanto, **el resultado de ∞–∞ tendrá valores distintos dependiendo de cada ejemplo concreto, y se dice entonces que su resultado es indeterminado, o bien que se trata de una indeterminación**. La mayor parte de las indeterminaciones se deshacen operando. Veamos un sencillo ejemplo justificativo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2}-\frac{x}{2}\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO.}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

Es decir, en este caso concreto ∞–∞ ha resultado ser igual a 1, pero veremos muchos más ejemplos en los que puede resultar otro número (incluido, por supuesto 0), o ∞, o –∞, o incluso no existir.

[2] Todas estas propiedades son válidas independientemente de que x→∞ o a un valor finito. Pueden consultarse las demostraciones de estas propiedades en Internet o en cualquier libro de texto.

[3] En el caso de una incógnita, sí es cierto que **a–a**, o **x–x**, etc. es obviamente igual a cero; ahora bien, adviértase que en el caso de ∞–∞ estamos hablando de límites, es decir, ambos ∞ no tienen por qué ser exactamente iguales, sino que pueden ser de distinto orden.

▪ **PRODUCTO:**

$$\infty\cdot\infty=\infty \qquad \infty\cdot(-\infty)=-\infty \qquad -\infty\cdot(-\infty)=\infty \qquad \infty\cdot k=\begin{cases}\infty & \text{si } k>0\\ \textbf{INDTDO.} & \text{si } k\to 0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases}$$

Veamos un ejemplo justificativo de la indeterminación anterior:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)=\infty\cdot 0=\text{INDTDO.}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

▪ **COCIENTE:**

$$\frac{\infty}{k}=\begin{cases}\infty & \text{si } k>0\\ \text{operar y/o hacer lim laterales} & \text{si } k\to 0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases} \qquad \frac{k}{\infty}=0 \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}=\textbf{INDTDO.}$$

$$\frac{0}{0}=\textbf{INDTDO.} \qquad \frac{k}{0}=\text{hacer lim laterales}$$

Veamos ejemplos prácticos de algunos de los casos anteriores:

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{0}=\lim_{x\to\infty}[(x+2)x]=\lim_{x\to\infty}(x^2+2x)\approx\lim_{x\to\infty}x^2=\infty^2=\infty$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+3}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to\infty}3=3$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

d) $$\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-1} \quad \left(\text{o bien, }\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-1}=\pm\infty\right)$$

e) $$\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{0}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{(0^-)^2}=\frac{4}{0^+}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{(0^+)^2}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\infty$$

Como conclusión, hemos visto una serie de indeterminaciones que podemos resumir en cuatro[4]:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \infty-\infty}$$

Ejercicio final tema: 9

[4] El próximo curso veremos las 3 indeterminaciones de tipo exponencial: $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, 0^0

VII) CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

1º) Límites de polinomios: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} P(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} (\text{tº de mayor grado})}$

Un ejemplo sería el ejercicio 8 del final del tema, ya realizado.

2º) Límites de cocientes de polinomios:

a) $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{0}{0}}$ «**Se resuelve factorizando numerador y denominador** (habitualmente por Ruffini, identidades notables, extraer factor común…) **y eliminando a continuación el factor problemático x-a que figura repetido en ambos términos de la fracción**»

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+1} = \frac{6}{3} = 2$$

Ejercicio final tema: 10

b) $\boxed{\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}}$ «**Se resuelve recurriendo en numerador y denominador a los términos de mayor grado de cada polinomio**[5]»

Ejemplos: Hay tres posibilidades, atendiendo a los grados de ambos polinomios:

a) gradP(x)=gradQ(x): $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+x+2}{2x^2+3x-1} = \dfrac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} 2 = 2$

b) gradP(x)>gradQ(x): $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+3}{x+3} = \dfrac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x} \approx \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

c) gradP(x)<gradQ(x): $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2+x+3} = \dfrac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0^+$

Ejercicios final tema: 11 a 15

VIII) CONTINUIDAD

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$ Es decir: **"Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto"**.

A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

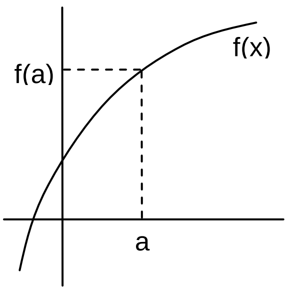
1) que exista imagen
2) que exista límite
3) y que ambos coincidan

(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

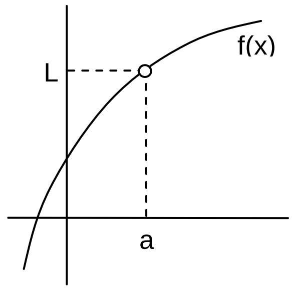
[5] Existe otra forma alternativa, en general más laboriosa, que consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en ambos polinomios.

Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

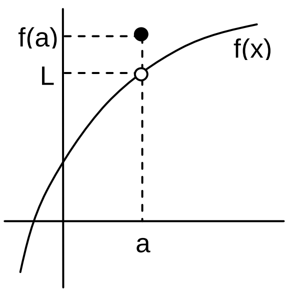
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado I del tema, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en x=a, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en x=a sólo en el primer supuesto:



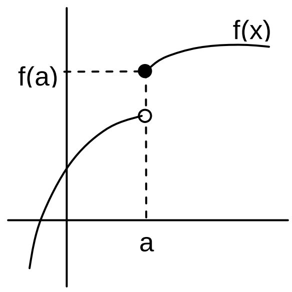
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ f(x) CONTINUA en



$\left.\begin{matrix} \nexists\, f(a) \\ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a



$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a



$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a

Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen.

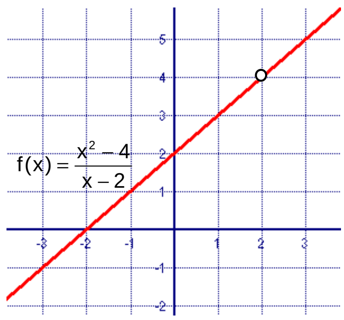
Ejemplo 8: Dada $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, estudiar su continuidad en x=2

Aplicando los tres requisitos de la continuidad, vemos que falla el 1º, ya que $\nexists\, f(2) \Rightarrow$ f(x) es discontinua en x=2 $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ continua } \forall\, x \in \Re\text{–}\{2\}}$

(Nótese que ello es independiente de que exista límite, como de hecho ocurre:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \underset{\text{INDTDO.}}{\overset{0\ /\ 0}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Gráficamente, la situación es la siguiente:



es decir, la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ prácticamente se comporta como la recta x+2 (salvo en x=2)

Por lo tanto, se trata de una discontinuidad evitable, es decir, bastaría redefinir la función de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 4 & \text{si } x=2\end{cases}$$

para que pasara a ser continua en x=2

Ejercicio 1: Representar las siguientes funciones, y estudiar su continuidad.

a) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ *(Soluc: f(x) continua* $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$*)*

b) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\leq 0\\ \ln x & \text{si } x>0\end{cases}$ *(Soluc: f(x) continua* $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$*)*

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Ejercicios final tema: 16 y ss.