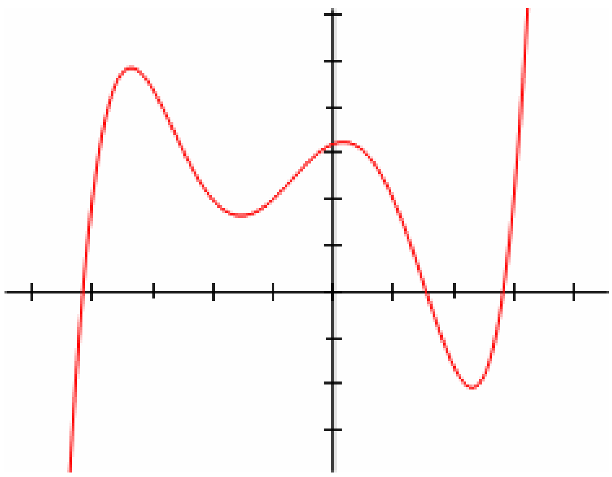
FUNCIONES



MATEMÁTICAS CCSS I   1º Bachillerato

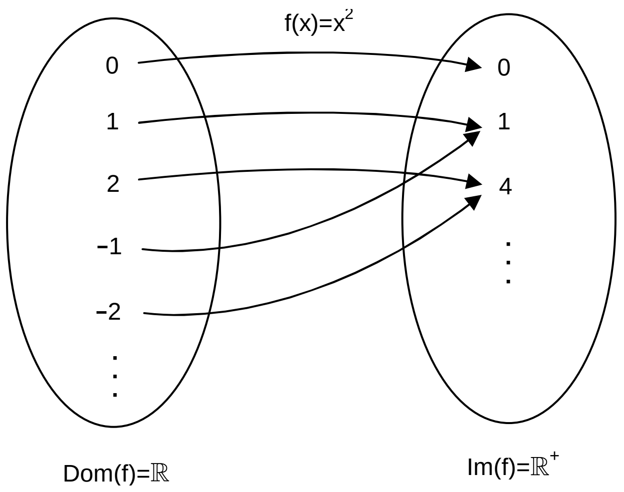
I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) CONCEPTO DE FUNCIÓN. DEFINICIONES

Ejemplo 1: Considerar la función $y=f(x)=x^2$

Podemos estudiar su comportamiento utilizando un diagrama de conjuntos o diagrama de Venn[1]:



Ahora bien, en la práctica lo anterior se suele indicar más bien mediante tabla de valores:

x	….	-2	-1	0	1	2	3	….
$f(x)=x^2$	….	4	1	0	1	4	9	….

(NOTA: más adelante veremos que esta función se trata de una parábola…)

Por ejemplo, se dice que la imagen de 3 a través de la función anterior es 9, y se designa como f(3)=9

¡Muy importante!: **Para que una función esté bien definida, cada x no puede tener más de una imagen.**

Definiciones:

« Una función es una aplicación entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento –llamado x, o variable independiente– **del conjunto inicial le corresponde un único elemento a lo sumo** –llamado imagen de x, o f(x)– **del conjunto final».**

Como acabamos de indicar, x se llama **variable independiente**, mientras que y es la **variable dependiente** (ya que, obviamente, depende de x).

f(x) se llama **imagen** de x, mientras que x se llama **antiimagen** de f(x). En el ejemplo anterior, la antiimagen de y=9 sería $x=\pm 3$.

Dominio de definición de la función: «Es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen»; se suele designar como Dom (f), o Dom f(x), etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, Dom (f)=ℝ, como se indica en el propio diagrama de conjuntos.

[1] Introducidos en 1880 por el matemático y filósofo británico John Venn (1834-1923)

Imagen o Recorrido de la función: «Es el conjunto formado por todas las imágenes f(x) posibles que recorre la función»; se puede designar como Im(f), o R(f), etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, Im(f)=$\mathbb{R}^+$, como también se indica en el diagrama.

Por tanto, la definición exhaustiva de esta función sería:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longrightarrow f(x)=x^2$$

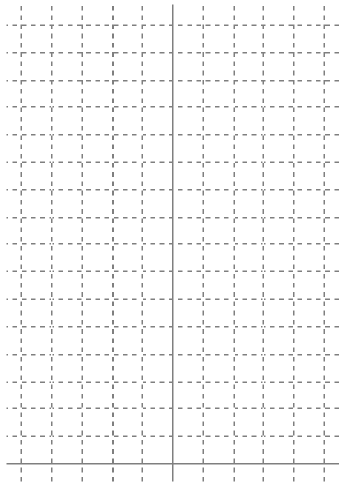
pero en la práctica, por comodidad, se suele abreviar diciendo simplemente $f(x)=x^2$

Ejercicios final tema: 1 y 2

II) GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo 2: Construir la gráfica de $f(x)=x^2$ mediante tabla de valores.

x	…. -5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5 ….
$f(x)=x^2$	….										….



Definición: «La gráfica de una función y=f(x) está formada por los ∞ puntos (x,y) que verifican la expresión y=f(x)».

Observaciones:

1º) Podemos obtener gráficamente el Dom(f) si nos desplazamos imaginariamente de izquierda a derecha a lo largo del eje **x** y vamos viendo –hacia arriba o hacia abajo– cuándo existe imagen, es decir, cuándo hay gráfica.

De la misma forma, podemos obtener el Im(f) a partir de la gráfica si nos vamos desplazando imaginariamente a lo largo del eje **y** de abajo a arriba y vamos viendo –a izquierda y derecha– cuándo existe antiimagen(es), es decir, cuándo hay gráfica.

2º) El hecho de que un mismo **x** no pueda tener más de una imagen se traduce gráficamente en que «Toda recta vertical que se desplace imaginariamente a lo largo de la gráfica sólo puede cortar a ésta a lo sumo en un punto[2]».

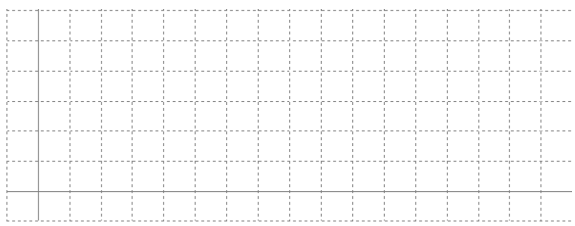
Ejemplo 3: Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Representarla gráficamente.

b) Deducir su Dom(f) e Im(f) a la vista de lo anterior.

x																	
$f(x)=\sqrt{x}$																	

Dom(f)=

Im(f)=



[2] En cambio, una recta horizontal que se desplace imaginariamente por la gráfica puede cortar a ésta en varios puntos, lo que corresponde al hecho de que un mismo f(x) puede tener varias antimágenes … (como ocurre en el ejemplo 2)

Ejercicios final tema: 3 a 6

III) CÁLCULO DEL Dom(f) DE LAS FUNCIONES MÁS HABITUALES

Vamos a ver una serie de "recetas" para deducir el dominio de definición de una función a partir exclusivamente del tipo de expresión analítica, es decir, sin necesidad de dibujar su gráfica previamente.

III.1) Función polinómica: «Dom[f(x) polinómica]=$\mathbb{R}$»

La explicación es obvia: recordemos que el dominio de una función está formado por todos los x para los que existe imagen, y es evidente que, sea cual sea el polinomio, siempre va a existir imagen $\forall x \in \mathbb{R}$.

III.2) Función racional:

Recordar que una función racional es toda aquella que se puede expresar como un cociente, es decir, una función del tipo $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$

Pues bien, es obvio que para una función tal existirá imagen siempre que el denominador no se anule; por lo tanto: **«El Dom(f) de una función racional está formado por todos los x para los que no se anula el denominador»**. Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom}\left[f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\right]=\left\{x \,/\, h(x)\neq 0\right\}$$

En la práctica, esto se traduce en ver cuándo se anula la expresión del denominador, es decir, resolver una ecuación; aquellos x que sean raíces del denominador tendremos que excluirlos del dominio:

Ejemplo 4: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x-4}$ *(Sol: Dom(f)=IR-{4})*

b) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$ *(Sol: Dom(f)=IR-{$\pm$2})*

c) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4}$ *(Sol: Dom(f)=IR)*

III.3) Función irracional:

Recordar que una función irracional es aquella en la que la x figura dentro de una raíz.

En este tipo de funciones es evidente que, si el índice de la raíz es par, entonces existirá imagen siempre que el radicando sea ≥ 0; ahora bien, si el índice es impar, no hay ningún problema en que el radicando sea negativo. Por lo tanto: **«El Dom(f) de una función irracional de índice par está formado por todos los x para los que su radicando es $\geq$0»**. Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom}\left[f(x)=\sqrt[\text{par}]{g(x)}\right]=\left\{x \,/\, g(x)\geq 0\right\}$$

En la práctica, esto se traduce en resolver una inecuación:

Ejemplo 5: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x)=\sqrt{x-9}$ *(Sol: Dom(f)=[9,∞))*

b) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ *(Sol: Dom(f)=(-∞,-3]U[3,∞))*

c) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-4x+3}$ *(Sol: Dom(f)=(-∞,1]U[3,∞))*

d) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ *(Sol: Dom(f)=IR)*

e) $f(x)=\sqrt[3]{x-9}$ *(Sol: Dom(f)=IR)*

f) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ *(Sol: Dom(f)=IR)*

NOTA: Para hallar también analíticamente el Im(f) habría que obtener, previamente, la inversa de f(x) –como veremos en el apartado VIII–, y hallar a continuación el dominio de ésta; como ello puede resultar complicado, se recomienda preferiblemente hallar el Im(f) gráficamente.

Ejercicios final tema: 7 y 8

IV) PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

IV.1) Continuidad: **«Una función es continua si puede dibujarse su gráfica sin levantar el lápiz del papel[3]. En caso contrario, se dice que es discontinua»**

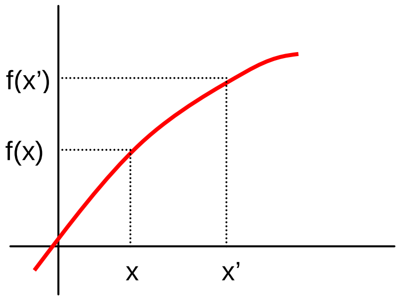
[3] En el tema 4 (Límites y continuidad) veremos una definición más formal de continuidad, que nos permitirá, además, obtener la continuidad de una función sin tener que representarla. De momento, nos contentaremos con esta definición "intuitiva", a partir de la gráfica.

NOTA: La continuidad se indica siempre respecto al eje x.

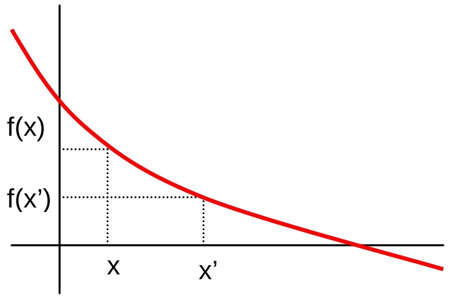
Ejercicio final tema: 9

IV.2) Crecimiento y decrecimiento. M y m:

Idea intuitiva:



FUNCIÓN CRECIENTE



FUNCIÓN DECRECIENTE

Def: « Una función es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, aumentan también las imágenes f(x) correspondientes».

« Una f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, disminuyen las imágenes f(x) correspondientes».

Más formalmente:

f(x) es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

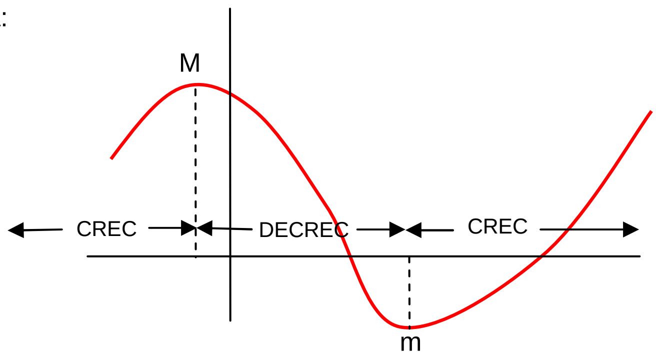
f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

Observaciones:

1º) Para indicar que una función es creciente utilizaremos el símbolo $\nearrow$, y $\searrow$ si es decreciente.

2º) En el caso de una función constante, la definición sería: $x < x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento o monotonía:



Def: « Una función presenta un **máximo** (M) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de creciente ($\nearrow$) a decreciente ($\searrow$) ».

« Una función presenta un **mínimo** (m) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de decreciente ($\searrow$) a creciente ($\nearrow$) ».

Más formalmente:

> f(x) tiene un M en x=**a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)<f(a)
>
> f(x) tiene un m en x=**a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)>f(a)

Observaciones:

1º) Los intervalos de crecimiento, también llamados de monotonía, se indican respecto al eje x.

2º) Los M y m que hemos definido se llaman extremos relativos[4].

3º) Cuando veamos el último tema (Derivadas), veremos una forma rápida y cómoda de obtener los intervalos de crecimiento y los extremos relativos, no gráfica sino analíticamente.

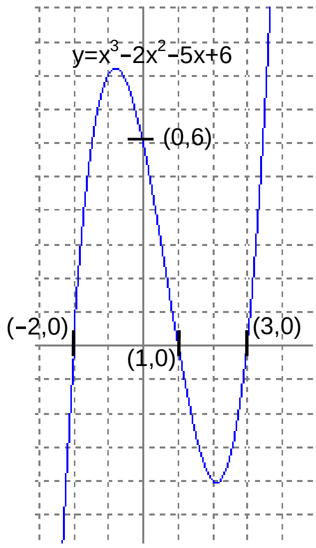
4º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.

5º) Si la f(x) es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.

Ejercicio final tema: 10

IV.3) Cortes con los ejes:

Observando la siguiente gráfica ejemplo:



es fácil entender la forma de obtener analíticamente –es decir, sin necesidad de dibujar previamente su gráfica– los puntos donde una función corta a los ejes de coordenadas, y que se resume en la siguiente tabla:

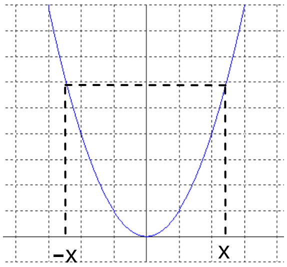
CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	Haciendo y=0 (Supone resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	Sustituyendo x=0	uno o ninguno

Ejercicios final tema: 11 y 12

[4] El máximo y mínimo que estamos definiendo se llaman extremos relativos o locales; el próximo curso los definiremos más formalmente, y también veremos que hay extremos absolutos…

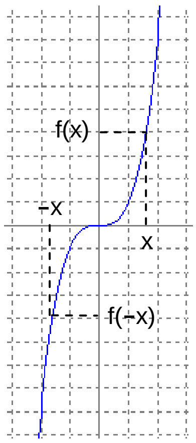
IV.4) Simetría:

a) f(x) PAR:



$$\boxed{f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica respecto al eje y} \quad [f(x) \text{ SIMÉTRICA PAR}]}$$

b) f(x) IMPAR:



$$\boxed{f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica respecto al origen} \quad [f(x) \text{ SIMÉTRICA IMPAR}]}$$

Observaciones:

1º) En la práctica, para ver si una función es simétrica a priori, es decir, sin necesidad de representarla gráficamente, tenemos que hallar f(–x), es decir, reemplazar x por –x (¡utilizando, cuando sea necesario, paréntesis!), y simplificar la expresión resultante; a continuación, tenemos que ver si f(–x) corresponde a alguno de los siguientes tres casos:

$$\boxed{f(-x)=\begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{IMPAR} \\ \text{ninguno de los anteriores} & \Rightarrow \text{no es simétrica} \end{cases}}$$

2º) Existen más tipos de simetría, pero nosotros este curso sólo vamos a ver estos dos.

3º) Una función no tiene por qué ser siempre simétrica; de hecho, la mayoría de las funciones no lo son.

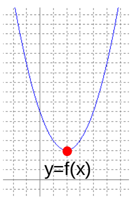
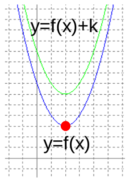
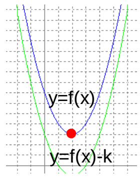
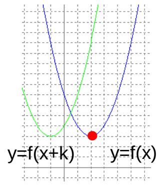
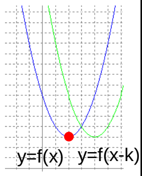
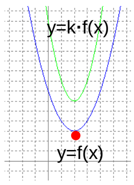
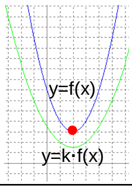
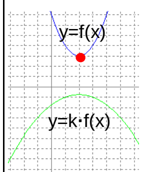
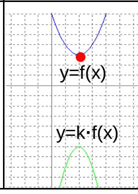
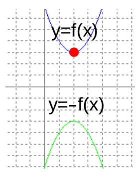
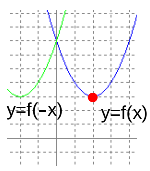
4º) **Utilidad de advertir** a priori –sin necesidad de hacer previamente una tabla de valores para dibujar su gráfica– **si una función es simétrica:** en caso de ser simétrica, podemos dedicar nuestros esfuerzos a la parte positiva del eje x, y dibujar cómodamente su mitad negativa sabiendo que será simétrica...

Por ejemplo, si una función es par y presenta un M(2,5), necesariamente tendrá otro en M(–2,5); ahora bien, si fuera impar, lo que presentaría es un m(–2,–5).

5º) Se utiliza el adjetivo "par" porque la función simétrica par típica es $y=x^2$, es decir, con exponente par (también tendría la misma simetría $y=x^4$, $y=x^2-2x^6$, etc.). De la misma forma, la función impar por antonomasia es $y=x^3$.

Ejercicios final tema: **13 a 16** (Simetría)
17 y 18 (Estudio completo de una función)

V) TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

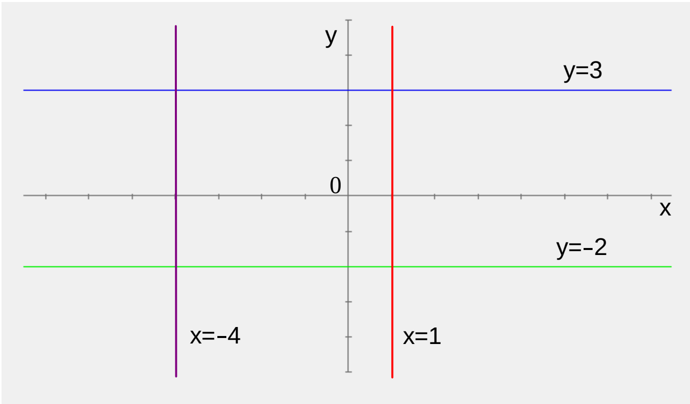
<table>
<tr><th>FUNCIÓN ORIGINAL</th><th>TIPO DE TRANSFORMACIÓN</th><th>FUNCIÓN TRANSFORMADA</th><th colspan="2">GRÁFICA</th><th>RESULTADO</th></tr>
<tr><td rowspan="10"></td><td rowspan="4">TRASLACIONES</td><td rowspan="2">y=f(x)±k</td><td colspan="2"></td><td>TRASLACIÓN hacia ARRIBA</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>TRASLACIÓN hacia ABAJO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">y=f(x±k)</td><td colspan="2"></td><td>TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>TRASLACIÓN hacia la DERECHA</td></tr>
<tr><td rowspan="4">CONTRACCIONES o EXPANSIONES</td><td rowspan="4">y=k · f (x)</td><td>k>1</td><td></td><td>CONTRACCIÓN</td></tr>
<tr><td>0<k<1</td><td></td><td>EXPANSIÓN</td></tr>
<tr><td>−1<k<0</td><td></td><td>(Reflexión +) EXPANSIÓN</td></tr>
<tr><td>k<−1</td><td></td><td>(Reflexión +) CONTRACCIÓN</td></tr>
<tr><td rowspan="2">REFLEXIONES</td><td>y=−f(x)</td><td colspan="2"></td><td>REFLEXIÓN respecto al EJE X</td></tr>
<tr><td>y=f(−x)</td><td colspan="2"></td><td>REFLEXIÓN respecto al EJE Y</td></tr>
</table>

Ejercicios final tema: 19 y 20

VI) ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE FUNCIONES

VI.1) Función constante   y=k

Su gráfica, lógicamente, es una recta horizontal, que corta al eje vertical a la altura de k unidades; ejemplos:

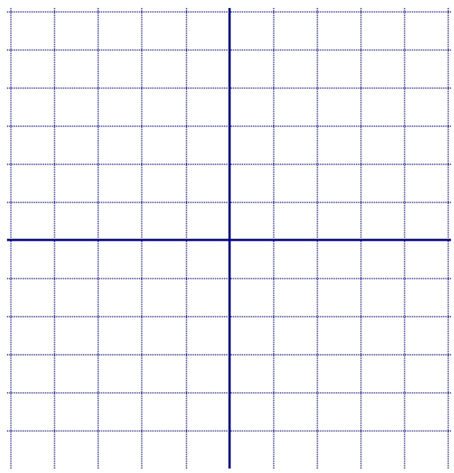


De forma parecida, **x=K** representa una recta vertical, la cual corta al eje x a la altura de k unidades; en el gráfico anterior puede verse un par de ejemplos de este caso. ¿Qué ecuación tendrán entonces los ejes de coordenadas?

VI.2) Función afín   y=mx+n

La gráfica de una función de 1er grado es siempre una recta. Ya vimos en los ejercicios del comienzo del tema que para representar una recta basta con dos valores (habitualmente se suele dar x=0 e y=0, correspondientes a los cortes con los ejes).

Ejemplo 6: Representar $\begin{array}{l} y=2x+3 \\ y=2x-5 \\ y=-3x-5 \end{array}$ sobre los mismos ejes.

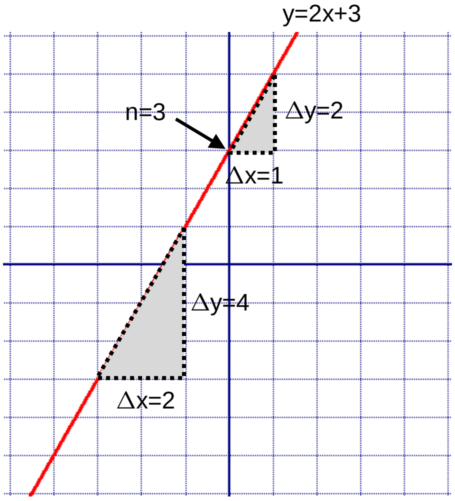


Consecuencias: 1º) m (el coeficiente de las x) se llama **pendiente**, e indica la inclinación de la recta:

$$\boxed{\begin{array}{l} m>0 \Rightarrow \text{recta CRECIENTE} \\ m<0 \Rightarrow \text{recta DECRECIENTE} \end{array}}$$

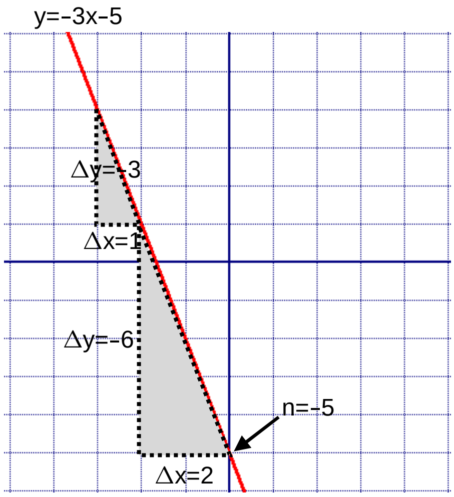
(Si m=0 –es decir, si la recta carece de término en x– significa que la recta y=n será horizontal, es decir, constante, como vimos en el subapartado anterior)

2º) n (el tº indpte.) se llama **ordenada en el origen**, e indica dónde corta la recta al eje y (Si n=0 –es decir, si la recta carece de tº indpte.– significa que la recta y=mx necesariamente pasará por el origen; se llama función de proporcionalidad directa)



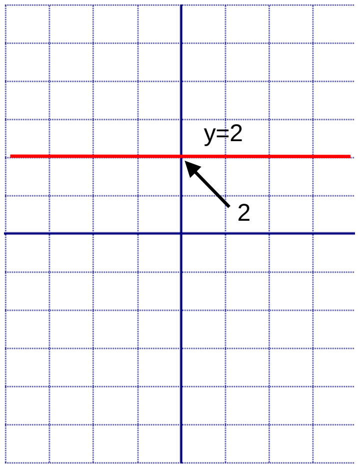
Por cada unidad que aumenta la x la y **aumenta** 2 unidades ⇒ m=2

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\ldots=2$$



Por cada unidad que aumenta la x la y **disminuye** 3 unidades ⇒ m=-3

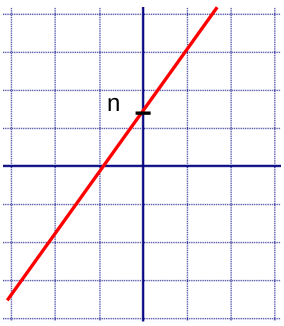
$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3}{1}=\frac{-6}{2}=\ldots=-3$$



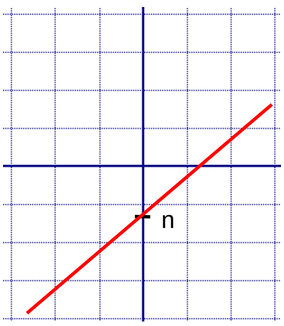
FUNCIÓN CONSTANTE

m=0

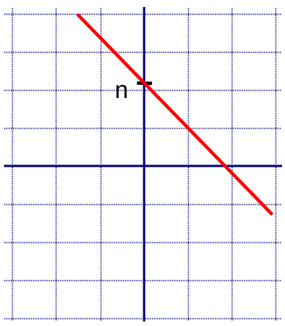
Por lo tanto, en función del signo de m y n, existen 4 casos:



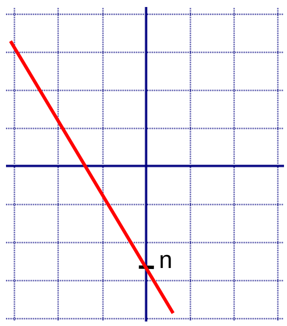
m>0
n>0



m>0
n<0



m<0
n>0



m<0
n<0

Ejercicios final tema: 21 a 25

VI.3) Función cuadrática $y=ax^2+bx+c$

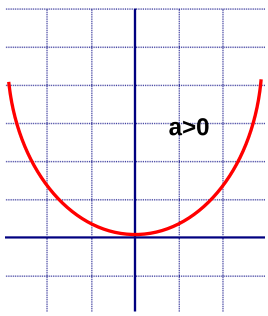
La gráfica de una función de 2º grado es siempre una parábola. Recordar de cursos anteriores que la forma rápida de representarla, mejor que mediante tabla de valores, es hallar los siguientes elementos:

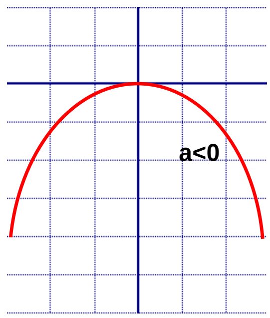
1º) Vértice: Su abscisa viene dada por $x_V=-\frac{b}{2a}$; la ordenada $\mathbf{y_v}$ se obtiene sustituyendo $\mathbf{x_v}$ en la ecuación de la parábola.

2º) Cortes con los ejes: El corte con el eje x se obtiene haciendo y=0, es decir, resolviendo la ecuación de 2º grado asociada a la parábola; nótese que la parábola no tiene por qué cortar necesariamente a dicho eje.

El corte con el eje y se obtiene simplemente sustituyendo x=0 en la ecuación de la parábola. Siempre va a cortar a dicho eje.

Observaciones: ■ El signo del coeficiente cuadrático, **a**, nos indica la orientación de la parábola:

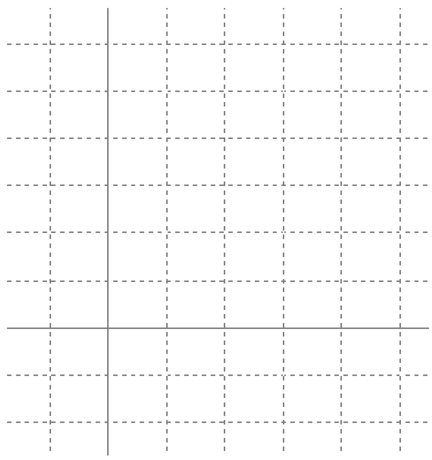




■ Las ramas de la parábola son simétricas respecto a un eje vertical que pase por su vértice.

■ **Caso particular: $y=ax^2$**
Aplicando todo lo anterior es trivial comprobar que la parábola $y=ax^2$ pasa por el origen, el cual es a la vez su vértice y su corte con los ejes.

<u>Ejemplo 7</u>: Representar la parábola $y=x^2-4x+3$



Ejercicios final tema: 26 a 37

VI.4) <u>Hipérbolas</u>: Son curvas cuya expresión es de la forma $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\text{, donde } c\neq 0}$

Ejercicio final tema: 38

A la vista del ejercicio anterior, para representar una hipérbola ya no es necesario hacer una tabla de valores, sino seguir los siguientes pasos:

1º) ASÍNTOTAS: A.H: $\boxed{y=\frac{a}{c}}$

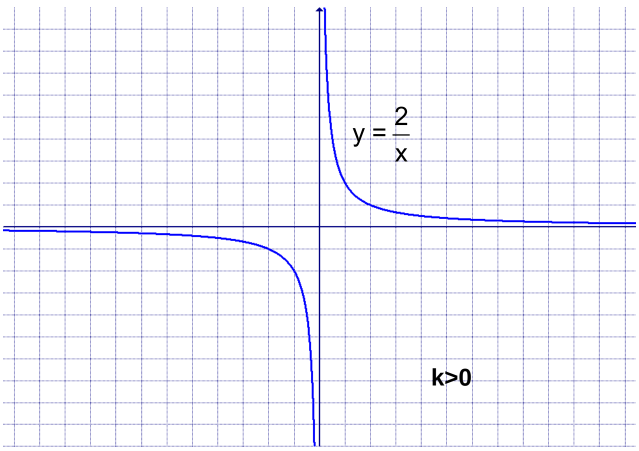
A.V: Anular el denominador: cx+d=0 $\Rightarrow$ $\boxed{x=-\frac{d}{c}}$

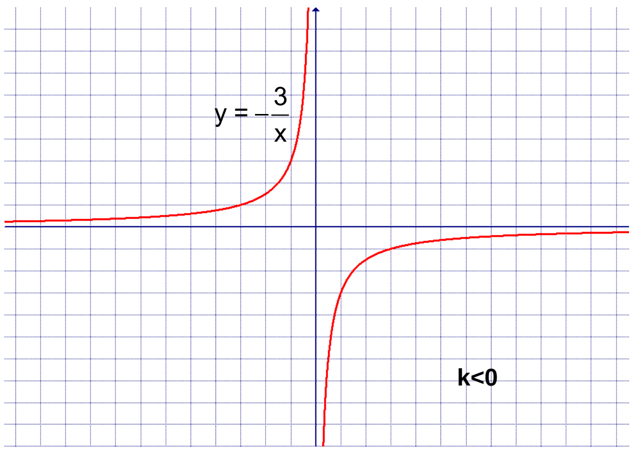
2º) CORTES EJES: Corte eje x: y=0 $\Rightarrow$ $\frac{ax+b}{cx+d}=0 \Rightarrow$ $\boxed{x=-\frac{b}{a}}$

Corte eje y: Sustituir x=0 $\Rightarrow$ $\boxed{y=\frac{b}{d}}$

<u>Caso particular</u>: Función de proporcionalidad inversa $\mathbf{y=\frac{k}{x}}$

Si en la hipérbola $y=\frac{ax+k}{cx+d}$ hacemos a=d=0 y c=1, obtenemos $y=\frac{k}{x}$, es decir, la llamada «**Función de proporcionalidad inversa**», ya vista en cursos anteriores. Recordar su gráfica, en función del signo de k:





Ejercicios final tema: 39 a 44

VI.5) <u>Función "parte entera"</u> f(x)=Ent(x)

«Es la función que asocia a cada x el entero más próximo situado a su izquierda en la recta real»**.**

Por ejemplo: Ent (5,3)=5

Ent (5)=5

Ent (-4,7)=-5

Ent (-3)=-3

etc...

Gráfica de la función Ent(x): **Ejercicio final tema: 45**

VI.6) Funciones a trozos

Para obtener la gráfica de una función definida a trozos, también llamada definida por ramas, hay que representar cada rama en su dominio particular de definición, como puede observarse en los siguientes ejercicios:

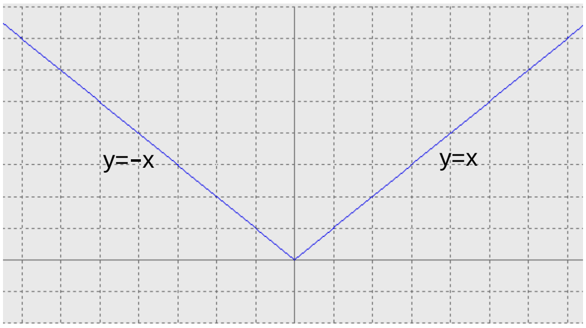
Ejercicios final tema: 46 y 47

VI.7) Función valor absoluto:

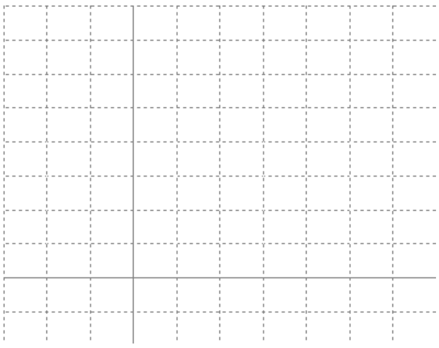
Definición:

$$\boxed{f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{si } x\le 0\\ x & \text{si } x>0\end{cases}}$$

Por lo tanto, su representación gráfica será:

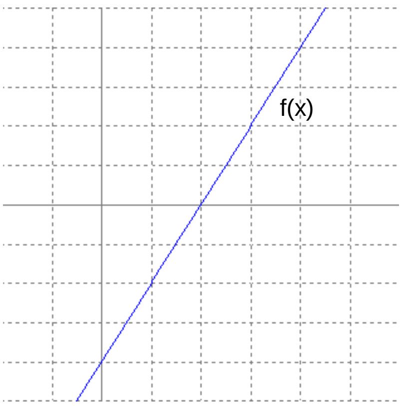


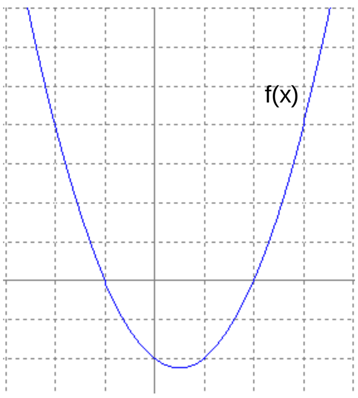
Ejemplo 8: Representar f(x)=$|2x-4|$ y expresarla como función definida a trozos.



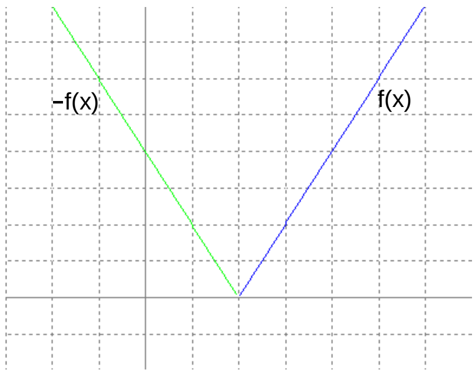
Conclusión: Pasos a seguir para representar |f(x)|:

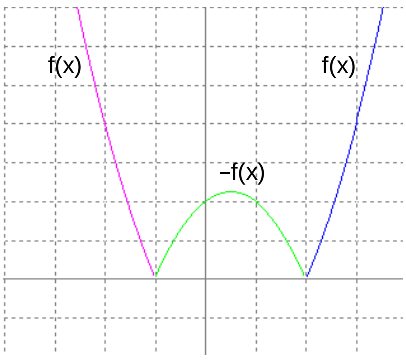
1º) Representar f(x):





2º) Las partes positivas (i.e. por encima del eje x) de f(x) se dejan igual, y las negativas se reflejan respecto al eje x:





Por lo tanto, la clave a la hora de **dibujar |f(x)|** es **ver cuándo se anula la función del interior del valor absoluto –es decir, f(x)–, y reflejarla** en los intervalos convenientes.

Ejercicios final tema: 48 y 49

50 a 59 (Problemas de aplicación)

VII) INTERPOLACIÓN y EXTRAPOLACIÓN

Ejemplo 8: Sabido es que los censos de población se realizan habitualmente cada 10 años. La tabla adjunta muestra la evolución de la población de la Comunidad de Madrid en los últimos decenios:

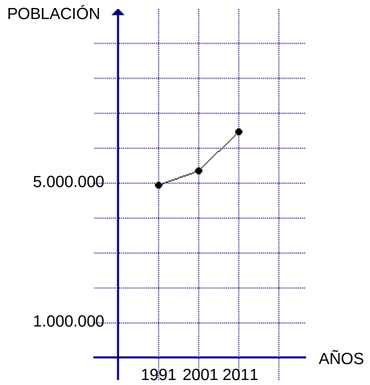
Año	1991	2001	2011
Población	4.947.555	5.372.433	6.489.680

Fuente: Instituto de Estadística de la Comunidad de Madrid (www.madrid.org/iestadis/)

Nos hacemos dos preguntas: ¿Cuál fue la población en 2006? ¿Cuál será la población estimada en 2013?

Cuando queremos conocer un dato comprendido entre dos datos de la tabla el proceso se llama **interpolación** (en este caso, 2006). Por el contrario, si el dato buscado está fuera de la tabla se trata de **extrapolación** (2013 en el ejemplo).

Para resolver las dos cuestiones planteadas, en primer lugar vamos a representar los datos de la tabla:



Observamos que los datos están bastante alineados, y por lo tanto vamos a aplicar **interpolación lineal** (también existe cuadrática, exponencial, etc.), es decir, **suponemos que la relación funcional entre las dos variables** del fenómeno estudiado **es una recta**. Para estimar la población en 2006 calcularemos la recta que pasa por los dos últimos puntos:

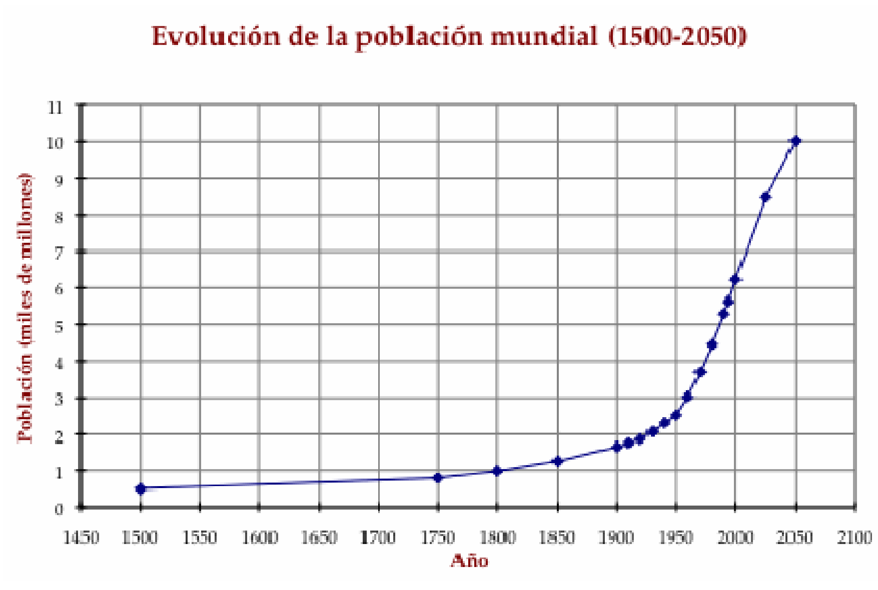
Compárese el valor obtenido con el real, 6.008.183 habitantes, que puede obtenerse en la fuente mencionada en la tabla. Y para estimar la población madrileña en 2013 podemos utilizar la misma recta:

(Valor real: 6.495.551 habitantes)

A la hora de interpolar, conviene tener en cuenta:

- En primer lugar, conviene representar los datos más dados, para ver si procede aplicar interpolación lineal, o cuadrática, etc.
- Para calcular la recta de interpolación (o extrapolación) tenemos que escoger los dos datos más cercanos al dato del cual nos piden una estimación.
- La extrapolación es tanto menos fiable cuanto más nos alejemos de los datos dados.

Por último, en ciertos casos se puede interpolar/extrapolar gráficamente. Los ejemplos más típicos son los de la evolución de la población mundial, o de las temperaturas medias debido al cambio climático:



Ejercicios final tema: 60 a 68