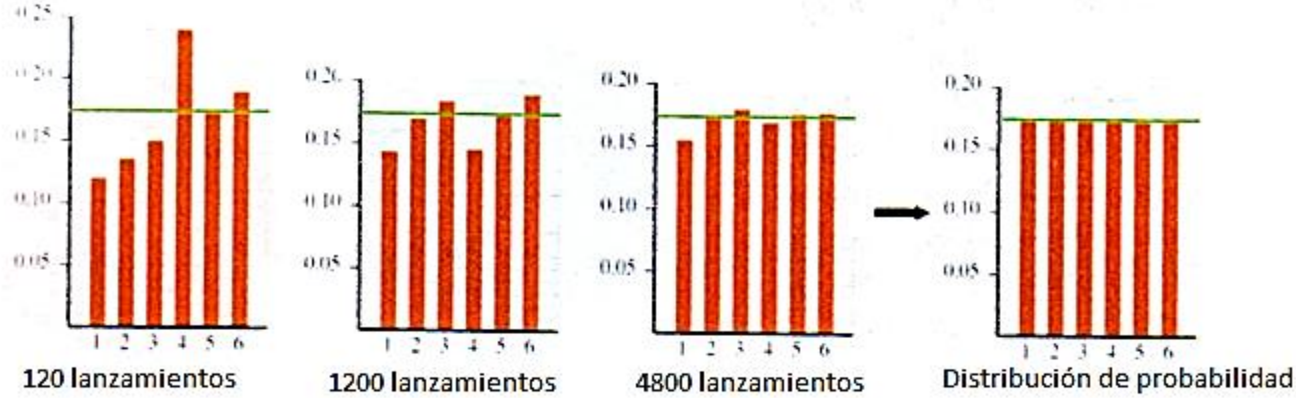
Relación entre el modelo Estadístico y el modelo Probabilístico de una variable aleatoria discreta.

Observemos la siguiente secuencia de gráficas correspondientes al lanzamiento de un dado.



Las tres primeras reflejan las frecuencias relativas obtenidas por cada una de las caras del dado al lanzarlo 120,1.200 y 4.800 veces, respectivamente. Las gráficas se parecen cada vez más a la última, siendo ésta la llamada distribución de probabilidad. Las primeras son empíricas (experimentales), fruto de la experiencia. La última es una distribución ideal, esperada, teórica, que se obtiene como límite de las gráficas que son empíricas cuando el número de lanzamientos, supuestamente, tiende a infinito.

Variable aleatoria:

Los experimentos se conciben de manera que los resultados del espacio muestral son cualitativos o cuantitativos. Como ejemplos de resultados cualitativos se tiene: en el lanzamiento de una moneda podemos obtener cara o número; un producto manufacturado en una fábrica, puede ser defectuoso o no defectuoso. Puede ser útil la cuantificación de los resultados cualitativos de un espacio muestral y, mediante el empleo de medidas numéricas, estudiar su comportamiento aleatorio. El concepto de variable aleatoria proporciona un medio para relacionar cualquier resultado con una medida.

Ejemplo 1:

Experimento aleatorio: lanzar dos monedas y observar si en éstas salen cara “C” o número “N”.

Espacio muestral: $\Omega = \{(C,C);(C,N);(N,C);(N,N)\}$

Ahora, si sólo interesa el número de caras, podemos introducir una función a la que se llama variable aleatoria.

Función variable aleatoria: $X : \Omega \to R \,/\, X$:"*número de caras*"

Es decir que: $X(C,C) = 2$

$X(C,N) = 1$

$X(N,C) = 1$

$X(N,N) = 0$

Podremos observar que el recorrido de la función X es $\{2,1,0\}$, dicho con símbolo: $\operatorname{Re}c(X)=\{2,1,0\}$.

A cada uno de los elementos del conjunto anterior se le puede asociar una probabilidad, es decir:

$$P(X=2)=P(C,C)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)=P(C,N)+P(N,C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

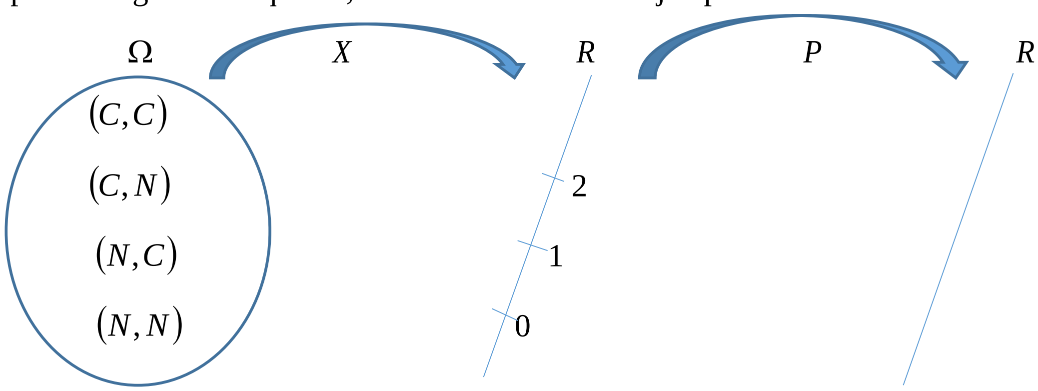
$$P(X=0)=P(N,N)=\frac{1}{4}$$

Vemos que la función X hace corresponde a cada elemento de Ω un número real y que, además, el conjunto de elementos de Ω, cuya imagen es uno de éstos números reales, es un suceso, y tiene por tanto una determinada probabilidad.

Las funciones $X:\Omega\to R$ que cumplen estas condiciones se llaman **variables aleatorias**. La palabra **variable** indica que la función puede tomar diversos valores (en el ejemplo; 2, 1, 0); y la palabra **aleatoria** indica que estos valores provienen de un experimento aleatorio (en el ejemplo; lanzar dos monedas).

El concepto de variable aleatoria nos permite que, a cada uno de sus valores del recorrido, le corresponda una determinada probabilidad.

Completa el siguiente esquema, teniendo en cuenta el ejemplo anterior.



<u>Tipos de variables aleatorias:</u>

- DISCRETA: Es cuando el recorrido de X es finito o infinito numerable. Ejemplo, cantidad de hijos de un núcleo familiar.
- CONTINUA: Es cuando el recorrido de X es uno a más intervalos de la recta real. Ejemplo, altura de una persona.

A continuación, definiremos las funciones de probabilidad inducidas por una variable aleatoria discreta.

Función de probabilidad llamada de densidad discreta: $f_X : R \to R \,/\, f_X(x) = P(X = x)$

<u>Siendo:</u> X **una variable aleatoria discreta.**

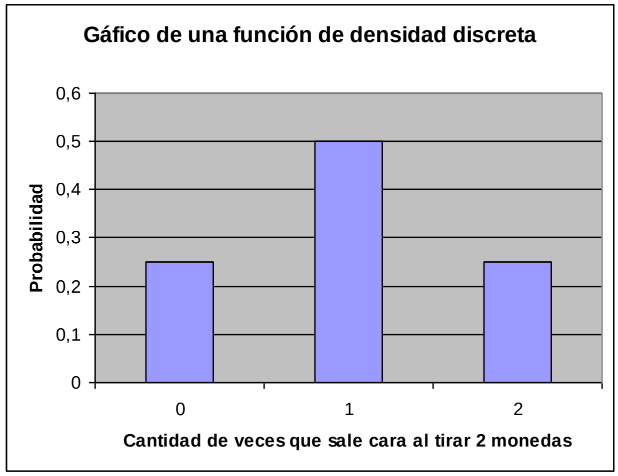
P **una función de probabilidad.**

f_X **es la función de densidad inducida por una variable aleatoria discreta.**

En el ejemplo trabajado,

la función de densidad discreta es la siguiente:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}25 & si\ x = 0\ o\ x = 2 \\ 0{,}5 & si\ x = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$



Función de distribución inducida por una variable aleatoria discreta: $F_X : R \to R \,/\, F_X(x) = P(X \le x)$

(Acumula los datos hasta x)

En el ejemplo trabajado,

la función de distribución

es la siguiente: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0{,}25 & si\ 0 \le x < 1 \\ 0{,}75 & si\ 1 \le x < 2 \\ 1 & si\ x \ge 2 \end{cases}$