

PROBABILIDAD

Fenómenos aleatorios o experimentos no deterministas:

A todo experimento que no se pueden a priori determinar el resultado final, se lo conoce como fenómenos aleatorios o experimentos no deterministas, pues interviene el azar.

Ejemplos de fenómenos aleatorios:

- “conocer el resultado del próximo encuentro de fútbol Brasil y Uruguay”
- “indicar qué número resulta seleccionado al extraer una bolilla en la lotería”
- “extraer un naipe de un mazo de cartas e indicar el palo”
- “tirar un dado y observar que número queda en la cara superior”

Definición de espacio muestral:

El espacio muestral, que se indicará “ Ω ” o “E”, es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.

Definición de suceso:

El suceso “S” es cada subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo 1: Se lanza un dado y se registra el número de puntos obtenidos en la cara superior.

- 1) ¿Cuál es el conjunto de resultados posibles?
- 2) ¿Cuál es el conjunto de resultados en que la cara superior es menor a cinco?
- 3) ¿Cuál es el conjunto de resultados en que la cara superior es par o impar?
- 4) ¿Cuál es el conjunto de resultados en que la cara superior es siete?
- 5) ¿Cuál es el conjunto de resultados en que la cara superior es múltiplo de 5?



- 1) El conjunto de resultados posibles $\{1,2,3,4,5,6\}$ es el **espacio muestral**. Por lo que se indicará:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- 2) El conjunto de resultados que presentan cara superior con puntos menores a cinco es el suceso:

$$S_2 = \{1,2,3,4\}$$

- 3) Él $S_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$ es el conjunto de los resultados pares e impares. S_3 es un **suceso seguro** ya que dicho suceso es igual al espacio muestral; $S_3 = E$

4) No existe en este experimento un resultado siete, por lo tanto, el suceso es $S_4 = \emptyset$.

S_4 es un **suceso imposible** puesto que dicho suceso no presenta elementos.

5) Él $S_5 = \{5\}$ ya que solo un resultado es múltiplo de cinco. S_5 es un **suceso elemental** porque solo presenta un elemento.

Continuando con el experimento de lanzar un dado, se supone que el dado no está cargado, con lo que nos aseguramos que todos los resultados son **igualmente probables o equiprobables**. Es decir, los resultados tienen la misma “chance” de ocurrir.

Dentro del mismo experimento, de tirar un dado, nos preguntamos:

➤ ¿Cuál es la probabilidad de obtener en la cara superior un número menor a cinco?

Como ya lo comentamos, este suceso es: $S_2 = \{1,2,3,4\}$, por lo que tenemos 4 chances, dentro de 6 casos posibles. Se dice que es: “4 casos favorables, en 6 posibles”. Por lo que la probabilidad se calcula:

$$P(S_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

➤ ¿Cuál es la probabilidad de obtener en la cara superior un número par o impar?

Este suceso, seguro, es: $S_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$, por lo que tenemos 6 chances, dentro de 6 casos posibles. Se dice que es: “6 casos favorables, en 6 posibles”. Por lo que la probabilidad se calcula:

$$P(S_3) = \frac{6}{6} = 1$$

➤ ¿Cuál es la probabilidad de obtener en la cara superior el número siete?

Este suceso, imposible, es: $S_4 = \emptyset$, por lo que tenemos 0 chance, dentro de 6 casos posibles. Se dice que es: “0 casos favorables, en 6 posibles”. Por lo que la probabilidad se calcula:

$$P(S_4) = \frac{0}{6} = 0$$

➤ ¿Cuál es la probabilidad de obtener en la cara superior un número múltiplo de cinco?

Este suceso, elemental, es: $S_5 = \{5\}$, por lo que tenemos 1 chance, dentro de 6 casos posibles. Se dice que es: “1 casos favorables, en 6 posibles”. Por lo que la probabilidad se calcula:

$$P(S_5) = \frac{1}{6}$$

En general:

PROBABILIDAD CLÁSICA, DEFINICIÓN DE LAPLACE

La probabilidad de que ocurra el suceso S es el número real $P(S)$ siendo: $P(S) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

Importante:

La probabilidad es un número real, mayor o igual que cero, y menor o igual que uno, es decir: $0 \leq P(S) \leq 1$.

La probabilidad del suceso seguro es 1, es decir: $P(\Omega) = 1$.

La probabilidad el suceso imposibles es 0, es decir: $P(\emptyset) = 0$.

Ejemplo 2:

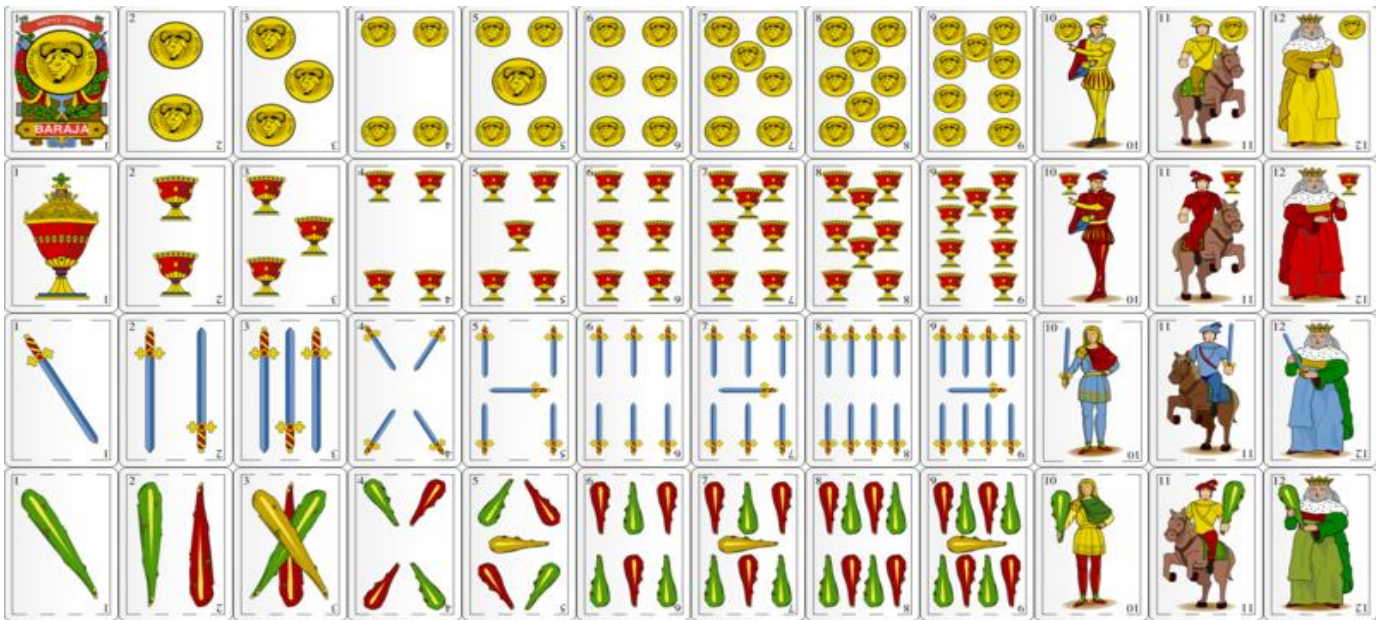
❖ En un experimento de extraer una carta al azar de 48 cartas españolas, consideramos los siguientes sucesos:

A: “la carta extraída es un número, con una cifra, de basto”

B: “la carta extraída es la figura caballo”

C: “la carta extraída es un número, con una cifra, de basto o es la figura caballo”

¿Cuál es la probabilidad de que ocurran estos sucesos?



El suceso A presenta 9 elementos, el suceso B tiene 4 elementos y el suceso C tiene 13 elementos y los casos posibles son 48. En consecuencia, la probabilidad de que ocurran cada uno de los sucesos es:

$$P(A) = \frac{9}{48} \quad P(B) = \frac{4}{48} \quad P(C) = \frac{13}{48} \quad \text{En donde se cumple: } \frac{9}{48} + \frac{4}{48} = \frac{13}{48}$$

El suceso A y el suceso B son **sucesos excluyentes** pues nunca ocurren a la vez. Esto significa que los sucesos A y B no tienen resultados comunes y por lo tanto la intersección de dichos sucesos es vacía.

Sucesos excluyentes

Diremos que dos sucesos A y B incluidos en un mismo espacio muestral, son excluyentes cuando no tienen elementos comunes, es decir la intersección es vacía.

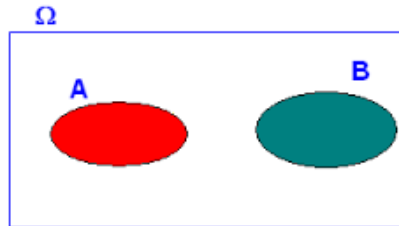
Dicho de otro modo: $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$, diremos que A y B son excluyentes $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Cuando decimos que ocurre el suceso A o el suceso B , estamos indicando que al menos ocurre uno de los sucesos (uno solo o ambos). Esto significa que los resultados pertenecen a la unión de dichos sucesos. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra A o B , cuando los sucesos son excluyentes, es:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Probabilidad de que ocurra A o B



❖ Analicemos ahora qué características tienen los siguientes sucesos según la carta extraída:

O: “la carta extraída es oro”

F: “la carta extraída es figura”

S: “la carta extraída es oro o figura”

En este ejemplo los sucesos son **no excluyentes**, pues la carta extraída o bien es oro (no figura), o bien figura (no oro), o bien figura de oro. Las chances de figura de oro, nos indican que los sucesos pueden ocurrir a la vez, ya que el suceso que es oro y el suceso que es figura tienen resultados en común. Los sucesos O y F presentan cada uno 12 resultados; además dichos sucesos presentan 3 resultados comunes. Los resultados comunes, pertenecen al suceso O y al suceso F, por lo tanto, a su intersección $O \cap F$.

Calculemos la probabilidad de que ocurran dichos sucesos:

$$P(O) = \frac{12}{48} \quad P(F) = \frac{12}{48} \quad P(O \cap F) = \frac{3}{48}$$

El suceso S es la unión del suceso O con el suceso F y presenta 21 resultados

La probabilidad de que ocurra S es: $P(S) = \frac{21}{48}$ y se cumple que $P(S) = \frac{12}{48} + \frac{12}{48} - \frac{3}{48}$

Como existen tres resultados en común, en el cálculo de la probabilidad debemos restar $\frac{3}{48}$ para contabilizarlos solo una vez.

En general:

La probabilidad de que ocurra A o B, cuando los sucesos son **no excluyentes**, es:

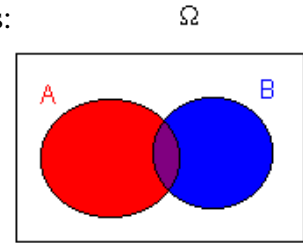
$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Probabilidad de que ocurra A o B



Probabilidad de que ocurra A y B



❖ Por último, analizaremos qué características tienen los siguientes sucesos según la carta extraída:

M: “la carta extraída es un número múltiplo de 3”

M': “la carta extraída no es un número múltiplo de 3”

En este caso los sucesos son complementarios, pues, ocurre siempre uno de ellos, pero nunca ocurren ambos. Esto significa que los sucesos M y M' no tienen resultados en común (son excluyentes) y además su unión es el espacio muestral.

La $P(M) = \frac{16}{48}$, ya que son 16 casos favorables en 48 posibles.

La $P(M') = \frac{32}{48}$, ya que son 32 casos favorables en 48 posibles.

Observemos además que: $P(M) + P(M') = \frac{16}{48} + \frac{32}{48} = 1 \Rightarrow P(M) + P(M') = 1 \Rightarrow P(M') = 1 - P(M)$

Sucesos complementarios

Diremos que dos sucesos A y A' incluidos en un mismo espacio muestral, son complementarios cuando no tienen elementos comunes y su unión es el espacio muestral.

Dicho de otro modo: $A \subseteq \Omega, A' \subseteq \Omega$, diremos que A y A' son complementarios $\Leftrightarrow A \cap A' = \emptyset$ y $A \cup A' = \Omega$

Como los sucesos complementarios son excluyentes, se cumple:

$$\left. \begin{aligned} A \cap A' = \emptyset &\Rightarrow P(A \cup A') = P(A) + P(A') \\ A \cup A' = \Omega &\Rightarrow P(\Omega) = P(A) + P(A') \\ P(\Omega) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$



En resumen:

Si A y A' son sucesos complementarios $\Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$.

Ejercicios:

1) Se extrae una bolilla, al azar, de una bolsa que contiene bolillas de distinto color: 7 amarillas, 8 negras, 6 rojas y 4 verdes. Calcula la probabilidad de que sea:

a) Roja b) Amarilla c) Blanca d) Verde o negra e) Amarilla, negra, roja o verde

2) Se extrae, al azar, una carta de un mazo de barajas españolas, de cuarenta y ocho cartas, sin comodines. Calcula la probabilidad de que sea:

a) El dos de espada b) Una carta de oro c) Un caballo d) Una figura e) Un número menor que 8

f) Un número mayor que 5 pero menor que 8 g) Un número mayor que 15 h) Un oro o una copa.